代数. 不等式 $\begin{cases} x = \cdots \\ y = \cdots \end{cases}$ 数列. $\sum x_i \geq (\prod x_i)^{\frac{1}{n}} \cdot n$

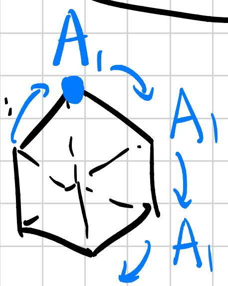
x : 数 ; 操作 ; 任何想定义的东西

群. $S = \{a \mid \cdots\}$

"$\times$" : ......

I ......

Example:



: 定义 $\boxed{a}$ 为"将正六边形顺时针旋转60°"

再定义 a 的运算: "$\times$" $a \times a$ $a^2, a^3, \cdots$

可执行 去执行

a, a^2, a^3, a^4, a^5, I → 幺元

$\langle a \rangle$

$a^6 = I$

$\boxed{x \times y}$

操作. 操作

$\underline{I} \times \underline{a} = a$

$\underline{a} \times \underline{I} = a$

数 $\xrightarrow{扩大}$ 所有东西

复数 : 代数基本定理

$x, y, z, \dots$

向量 $\rightarrow$ $\vec{v} = (1, 2, 3, \dots, 7)$

$v = ($数$,$ 数$, \dots,$ 数$)$

列

行 $\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

$A = ($向量$,$ 向量$, \dots,$ 向量$)$

$= (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 8 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ \vdots \\ n+6 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & & \\ 7 & 8 & \cdots & n+6 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{矩阵}}$：向量的推广，向量代替数产生矩阵

$(1, 2, \dots, 7)$：行向量

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix}$：列向量

$A = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

定义：n维向量 指的是有n个分量的 n×1 的矩阵

$$\begin{array}{c|c} & a \quad b \;(\text{列}) \\ \hline \text{行} & \begin{pmatrix} \; \\ \; \end{pmatrix} \end{array}$$

$$2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (1 \; 2 \; \cdots \; 7)$$

定义：向量之间有点乘：两个n维向量才可做点乘

（数的乘法是两个一维向量的点乘）

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$1\text{行} \rightarrow \underbrace{(v_1 \; v_2 \; \cdots \; v_n)}_{n\text{列}} \; n\text{行} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} 1\text{列} = v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$$

$\vec{v}_1 \; \vec{v}_2 \; \cdots \; \vec{v}_n$

矩阵 向量里夹向量 向量 夹数

定义矩阵乘法：

①

$$l\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}_{\underbrace{\qquad}_{m}} \underline{\underline{i_{th}}} \; m\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}_{\underset{j_{th}}{n}} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le m}} (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$$

x_{ij}

↓ 行 ↓ 列

$1\le i\le m \quad 1\le j\le n$

$$= l\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}_{n} = \underline{\underline{(c_{ij})}}_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le n}}$$

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{im})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

② 行向量 $= (a_1, a_2, \cdots a_n)$

线性组合 $x_1, \cdots x_n$

$\lambda_1 \cdots \lambda_n \in \mathbb{C}$

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$

矩阵：$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ $v_1 \cdots v_n$ 是 m 维向量

$n \times m$ 的矩阵

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_m)$$

$$(a_1 \cdots a_n) \cdot \begin{pmatrix} \vec{v_1} \\ \vec{v_2} \\ \vdots \\ \vec{v_n} \end{pmatrix} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \cdots + a_n \vec{v_n}$$

$$\begin{matrix} (a_1 v_1 & \cdots &) \\ + & & \\ (a_2 v_2 & \cdots &) \\ + & & \\ (a_n v_n & \cdots &) \end{matrix}$$

$$(a_1 \cdots a_m)\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_m\end{pmatrix} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m$$

$\vec{v}_1 \sim \vec{v}_m$ 线性组合

$\vec{v}_i$ n维

③ 列向量 $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}$ 矩阵 $(\vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_m)$

$$\begin{array}{c} n \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}(\vec{v}_1\ \ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_m) \\ m \end{array}\ m\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

向量左乘

代表矩阵的行进行线性组合

矩阵

右乘向量

代表矩阵的列进行线性组合

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 7} \\ \boxed{3 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \\ v_2 \end{array} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = x\vec{v_1} + y\vec{v_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{v_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{u_1} + y\vec{u_2} + z\vec{u_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\vec{v}_1 + y_1\vec{v}_2 \\ x_2\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 \\ x_3\vec{v}_1 + y_3\vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

行的组合

行行组合

行行组合

坐标/参数 ← 初始矩阵

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\vec{v}_1 + y_1\vec{v}_2 + z_1\vec{v}_3 & x_2\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2 + z_2\vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

B↷A　　　A←B

矩阵乘法中，左乘为行变换

右乘为列变换

矩阵和线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

右乘

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \vec{v_1} + x_2 \vec{v_2} + x_3 \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x\vec{v_1} + y\vec{v_2} + z\vec{v_3}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

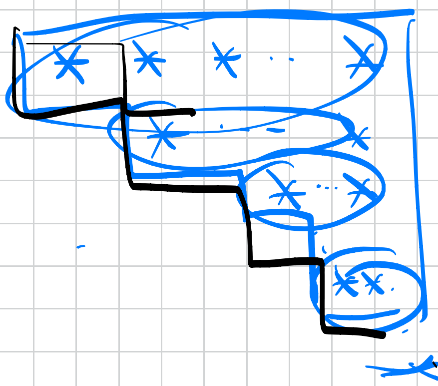
$x = 3$ ✓

行阶梯形矩阵

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 = \frac{1}{8} & x_5 = \frac{1}{2} \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
7 \\ 1 \\ 1 \\ 1
\end{pmatrix}
$$

高斯消元



$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}
$$

高斯消元：将矩阵 → 行阶梯形

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

右乘

代表对列操作

$3x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 7$ A

$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ B

$(3A+4B)x_1 + (7A+3B)x_2 + (A+3B)x_3$

$+ (2A+B)x_4 = 7A + 0B$

r: row 行

c: column 列

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 - 0r_1]{r_2 - \frac{4}{3}r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & - & - & - & - \\ 0 & - & - & - & - \end{array}\right)$$

$4 - \frac{4}{3}\times 3 \quad 3 - \frac{4}{3}\times 7 \quad 3 - \frac{4}{3}\times 1 \quad 1 - \frac{4}{3}\times 2 \quad 0 - \frac{4}{3}\times 7$

$$\xrightarrow{r_3 - 0r_1} \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ & & - & - & - \\ & & & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1个解.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & 0 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

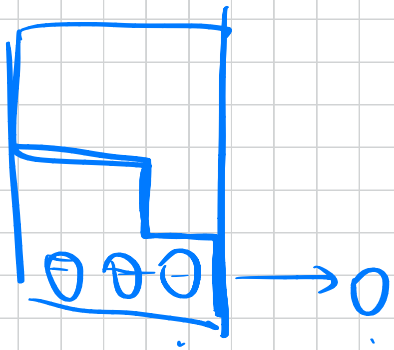
无穷个解.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & \boxed{4} & 7 & 1 & 2 & 1 \\ & & 7 & \boxed{0} & 6 & 1 \\ & & & & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$$

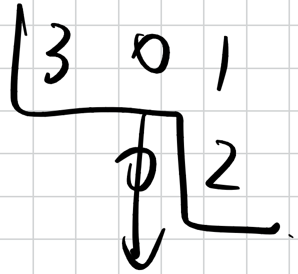
全0行 $\xrightarrow{\text{有矛盾}}$ 无解

无全0行 → 有解.



$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&7\\2&3&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&2\\0&1&1&7\end{array}\right)$$

pivots：主元



$$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$$

高斯消元：① 化成行阶梯形，从上往下消元

② 有解/无穷解(自由元)/无解 可由行阶梯形看出

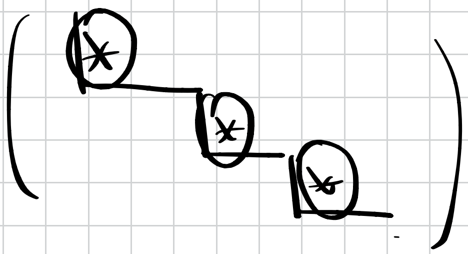
③ 在主元为0时可做变换使主元≠0

解出线性方程组

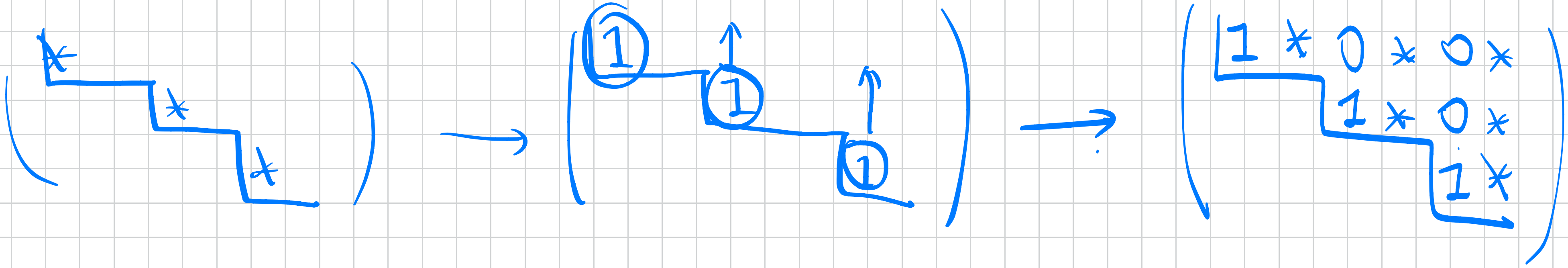
④ 将主元变成1

⑤ 用主元消去上方的非0项

化最简形消元：



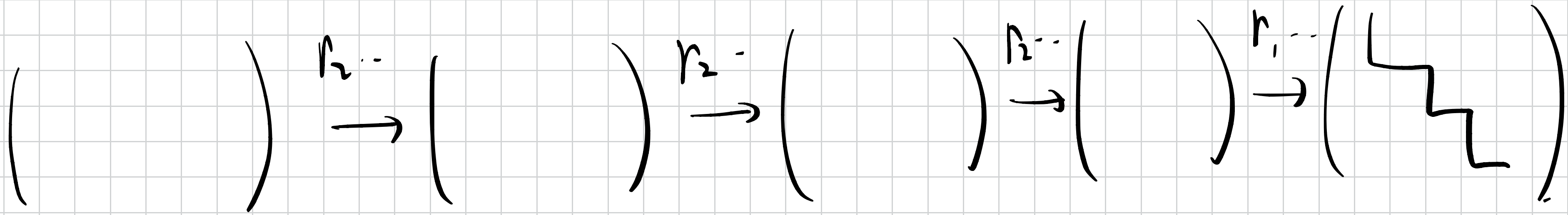
$$\left(\begin{array}{cccc|c}3&2&6&1&7\\&7&2&&7\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{7}r_2]{\frac{1}{3}r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{2}{3}&2&\frac{1}{3}&\frac{7}{3}\\0&1&&&1\end{array}\right)$$



$$\begin{array}{c} \begin{matrix}4&0&4&0&5\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1&\boxed{3}&0&2&0\\ & &1&1&0\\ & & & &1\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix}$$

$=5,$

行最简形



$A \times \underline{B} = A$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & & & \end{pmatrix}$$

$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$1 + 0 + 0$

不变元为 I. 对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

逆元： 求 X 使 $\underline{AX = I} \longrightarrow X$ 为右逆

$XA = I \longrightarrow X$ 为左逆

$\underline{X = A^{-1}}$

思考：对于一个 $n \times m$ 矩阵 A，问

(1) A 是否一定有左逆　(2) A 是否一定有右逆

(3) 举出 A 有左逆无右逆的例子

(4) 若 A 有左逆 X，有右逆 Y，证明：$X = Y$（称 X 为逆）

性质：(1) 矩阵乘法不交换

$$\underset{n}{n(A)} \underset{n}{n(X)}$$

$$X \curvearrowright A$$

$$AB = BA$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{方阵}}}{A} \overset{n\times n}{I} = \overset{n\times n}{I} A, \quad n\times n$$

(2) 矩阵乘法可结合 $(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$.

证明：对 $\underset{l\times m}{A}\ \underset{m\times n}{B}\ \underset{n\times k}{C}$: $(AB)C = A(BC)$

定义: A^T 表示转置

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$$

$$A^T=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

$$\underline{b_{ij}=a_{ji}}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&1&0\\5&2&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&4&5\\2&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&7\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T=\underline{\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}}$$

$\underline{\vec{v}}$ 列 $\qquad$ $\vec{v}^T$ 行