两个不等式的最优系数

刘志源

(南方科技大学, 518055)

AMM 2022 年 12311 号问题如下:

问题 已知 m,n 均为正整数, $r,x_1,x_2,...,x_n$ 是正实数, 求证:

(a) 当 $r\le\frac{m}{2}$ 时,

$$\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)^r\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^{\mathrm{C}_{m+1}^2};\tag{1}$$

(b) 当 $r\ge\frac{m}{2}$ 时,

$$(b)\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)^r\le\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^{\mathrm{C}_{m+1}^2}.\tag{2}$$

证明 (a) 只需要证明当 $r\le\frac{m}{2}$ 时,

$$\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}}\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

由幂平均不等式

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^{\frac{1}{r}}\le\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{m}}.$$

故而只需证明:

$$\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}}\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{m}}.$$

由柯西不等式

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m-j}\right)\ge\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m}{2}}\right)^2,\quad j=0,1,...,m.$$

则

$$\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}}=\left(\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^j\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m-j}\right)\right)^{\frac{1}{2\mathrm{C}_{m+1}^2}}$$

修订日期: **2024-01-21.**

$$
\begin{aligned}
&\geq \prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{m}}.
\end{aligned}
$$

因此 (a) 得证.

(b) 由幂平均不等式知

$$
\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{j}\right)^{\frac{1}{j}} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad j=0,1,...,m.
$$

则

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{j}\right)^{r} &\leq \prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m}\right)^{\frac{j}{m}r} \\
&\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m}\right)^{\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{j}{m}r} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m}\right)^{\frac{1}{m}\mathrm{C}_{m+1}^2 r} \\
&\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{r}\right)^{\frac{1}{r}\mathrm{C}_{m+1}^2 r} \\
&= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{r}\right)^{\mathrm{C}_{m+1}^2}.
\end{aligned}
$$

因此 (b) 得证. □

完成以上证明之后, 冷岗松老师建议笔者研究指数 r 的最优常数. 笔者得到了下面的结果:

$$
r=\frac{m+1}{2}\text{是不等式 (1) 的最优值.} \tag{3}
$$

下面是 (3) 的证明:

证明

$$
\begin{aligned}
\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{j}\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}} &= \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{j}\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{j}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{m+1-j}\right)\right)^{\frac{1}{2\mathrm{C}_{m+1}^2}} \\
&\geq \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{C}_{m+1}^2}}
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{\frac{m+1}{2}}\right)^{\frac{2}{m+1}}.$$

对于 $r > \frac{m+1}{2}$, 取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1, x_n = \varepsilon > 0$. 令

$$f(\varepsilon) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon^j)^r}{(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon^r)^{\mathrm{C}_{m+1}^2}}.$$

实际上, 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上是连续函数知

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f(\varepsilon) = f(0) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m(r-\frac{m+1}{2})} < 1.$$

故此时可以取到 $\varepsilon > 0$ 使得 $f(\varepsilon) < 1$, 这样就说明 $r > \frac{m+1}{2}$ 时 (1) 不成立. □

上海中学王淳稷同学给出了 (2) 的最优情况:

$$r = m \text{ **是不等式 (2) 的最优值**}. \tag{4}$$

证明 $r = m$ 时,(2) 恒成立已证,

假设存在 $r < m$ 使得 (2) 始终成立, 取 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1, x_n = t$, 有:

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^j\right)^r &= \prod_{j=0}^{m}\left(1 + \frac{t^j - 1}{n}\right)^r \\ &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_k^r\right)^{\mathrm{C}_{m+1}^2} \\ &= \left(1 + \frac{t^r - 1}{n}\right)^{\mathrm{C}_{m+1}^2}.\end{aligned}$$

由 $1 + x$ 与 e^x 在 $x \to 0$ 是等价无穷小并且令 $n \to +\infty$ 知:

$$r\sum_{j=0}^{m}(t^j - 1) \leq \mathrm{C}_{m+1}^2(t^r - 1).$$

此时 LHS 是 m 次多项式, 由于 $r < m$, 故存在 $t \in \mathbb{R}_+$, RHS > LHS, 矛盾.

故有 (2) 最优值为 m. □