2022 年保加利亚数学奥林匹克试题解析

冯慧君　王沈杰　易超　刘志源

(湖南省长沙市第一中学, 410005)

指导教师: 何最祥

本次试题中第 1 题, 第 4 题, 第 5 题此三题比较容易; 第 2 题适合作为训练, 挖掘常见的性质, 考察基本功; 第 3 题容易陷入困境, 实际突破口小, 值得让学生好好体会; 第 6 题是个十分优质的组合题, 相当于联赛第三题到第四题之间的难度, 适合作为考题或者限时训练. 下面给出试题、解答和评注, 笔者水平有限, 不当之处还请指正.

I. 试 题

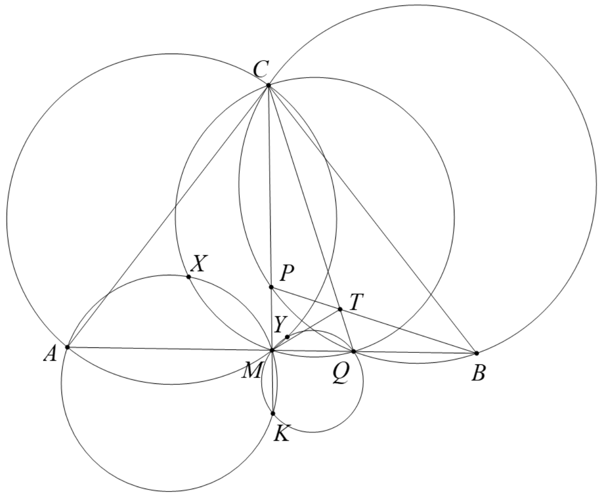
1. 将边长为 2022 的白色正三角形 T 划分为若干边长为 1, 且每条边和 T 的某条边平行的正三角形单元格. 对两个单元格, 若它们有公共顶点, 称它们是相邻的. 伊万将其中一些单元格染成黑色, 彼得不知染色的信息, 所以选择一些单元格组成的集合 S, 然后伊万告诉彼得 S 中黑色单元格的个数的奇偶性. 随后彼得就知道了异色相邻单元格的个数的奇偶性.

求 $|S|$ 的所有可能取值.

2. 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, M 为 AB 的中点, 过 B, C 的圆与 CM, BM 分别交于点 P, Q. 设 K 为 P 关于 M 的对称点, $\odot(AKM)$, $\odot(CQM)$ 再次交于点 X, $\odot(AMC)$, $\odot(KQM)$ 再次交于点 Y, 线段 BP, CQ 交于点 T, 证明: MT 与 $\odot(MXY)$ 相切.

3. 正整数 $x > y > 2022$, 满足 $xy + x + y$ 为完全平方数. 是否存在 x, y 使得对任意正整数 $z \in [x + 3y + 1,\ 3x + y + 1]$, 均有 $x + y + z$ 和 $x^2 + xy + y^2$ 不互素?

修订日期: 2022-05-20.



4. 设正整数 $n \geq 4$, 实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}$ 中, $x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2$. 如果存在 $a>0$, 使得对任意 $i \in \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 都有 ${x_i}^2=a+x_{i+1}x_{i+2}$, 证明: $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中至少有两个数为负数.

5. 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=4,\ BC=CA=6$. 在线段 AB 上的点 $X_1,\ X_2,\ X_3,\ \cdots$, 使得 $AX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的无穷等比数列. 在线段 CB 上的点 $Y_1,\ Y_2,\ Y_3,\ \cdots$, 使得 $CY_1,\ Y_1Y_2,\ Y_2Y_3,\ \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比数列. 在线段 AC 上的点 $Z_1,\ Z_2,\ Z_3,\ \cdots$, 使得 $AZ_1,\ Z_1Z_2,\ Z_2Z_3,\ \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比数列. 求所有正整数 $(a,\ b,\ c)$, 使得 $AY_a,\ BZ_b,\ CX_c$ 三线共点.

6. 设正整数 $n \geq 2$, 正整数集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $A_i \cap B_j \neq \varnothing$, 且对任意 $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $B_i \cap B_j = \varnothing$. 将每个集合中的所有元素按降序排列, 并计算相邻元素的差的值. 求这些差中的最大值可能的最小值.

II. 解答与评注

题 1 将边长为 2022 的白色正三角形 T 划分为若干边长为 1, 且每条边和 T 的某条边平行的正三角形单元格. 对两个单元格, 若它们有公共顶点, 称它们是相邻的. 伊万将其中一些单元格染成黑色, 彼得不知染色的信息, 所以选择一些单元格组成的集合 S, 然后伊万告诉彼得 S 中黑色单元格的个数的奇偶性. 随后彼得就知道了异色相邻单元格的个数的奇偶性.

求 $|S|$ 的所有可能取值.

解 (冯慧君)　$|S|$ 只有可能为 12120.

我们称与一个单元格相邻的单元格的个数为这个单元格的度数.

我们首先假设只有一个单元格被染成黑色, 此时整个图形中异色相邻单元格组的个数即为这个单元格的度数, 不妨设这个单元格在集合 S 中. 由此可知, S 中的单元格度数的奇偶性相同.

若 S 中不包括全部的度数为奇数(偶数)的单元格, 我们可以染黑一个不属于 S 的单元格, 它的度数既可能是奇数也可能是偶数, 即异色相邻单元格奇偶性无法确定. 而此时 S 中黑色单元格奇偶性只可能为偶数, 矛盾!所以 S 只能取全部的度数为奇数(偶数)的单元格.

若集合 S 为全部的度数为偶数的单元格. 我们可以将一个 S 中的单元格或者两个 S 中的不相邻的单元格染成黑色, 此时 S 中黑色单元格的个数为奇数或偶数, 而图中异色相邻单元格组的个数均为偶数, 矛盾!所以 S 只能取全部的度数为奇数的单元格.

此时 $|S|$ 只可能为 12120. 我们证明这种取法是成立的.

首先, 染黑的单元格若存在相邻的单元格, 则整体的异色相邻单元格组的个数将减少 2, 对于异色相邻单元格个数的奇偶性无影响.

其次, 染黑度数为偶数的单元格后, 异色相邻单元格个数增加偶数个, 对于其奇偶性无影响; 染黑度数为奇数的单元格后, 异色相邻单元格个数增加奇数个, 对于其奇偶性有影响.

因此异色相邻单元格的奇偶性只与染黑的度数为奇数的单元格的奇偶性有关, 即只与 S 中黑色单元格个数有关, 且与其同奇偶. 故 S 取全部度数为奇数的单元格时成立.

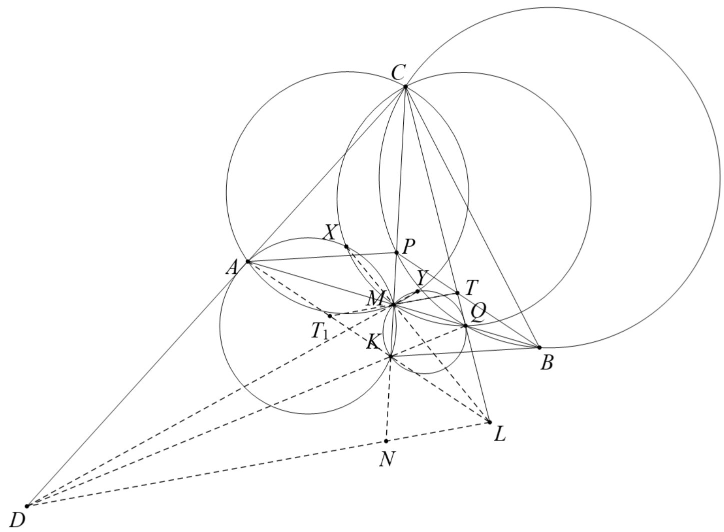
综上, $|S|$ 的所有可能值为 12120. □

评注　本题是个较为简单的组合题, 思路自然, 只需从特殊情况入手即可.

题 2　如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, M 为 AB 的中点, 过 B, C 的圆与 CM, BM 分别交于点 P, Q. 设 K 为 P 关于 M 的对称点, $\odot(AKM)$, $\odot(CQM)$ 再次交于点 X, $\odot(AMC)$, $\odot(KQM)$ 再次交于点 Y, 线段 BP, CQ 交于点 T, 证明: MT 与 $\odot(MXY)$ 相切.

证明 1 (冯慧君)　由题意得 $MQ \cdot MB = MP \cdot MC$, 结合 M 为 AB 的中点, K 为 P 关于 M 的对称点得 $MQ \cdot MA = MK \cdot MC$, 故 A, C, Q, K 四点共圆.

设 $TM \cap AK = T_1$, 由 $APBK$ 为平行四边形, 故 $TM = T_1M$, 根据蝴



蝶定理逆定理得: $\odot(ACQK)$ 的圆心在 TT_1 的中垂线上, 故原命题转化为 $MT \parallel \odot(MXY)$ 与 $\odot(ACQK)$ 的根轴.

设 $CA \cap YM = D$, $XM \cap AK = L$, 根据根心定理知 D 在 KQ 上, L 在 CQ 上, 故 DL 为 $\odot(MXY)$ 与 $\odot(ACQK)$ 的根轴. 因此只需证明: $MT \parallel DL$.

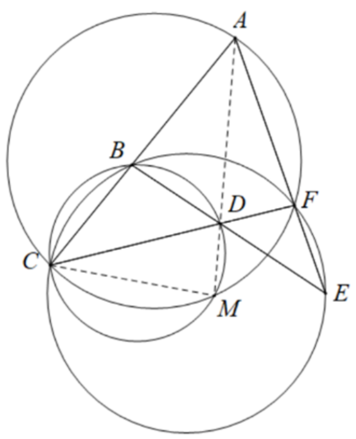
设 $CM \cap DL = N$, 以 M 为 $\odot(ACQK)$ 的极点, DL 为极线得: C, K, M, N 四点调和, 即 LT, LM, LT_1, LD 为调和线束. 又 M 为 TT_1 的中点, 故 $MT \parallel DL$.

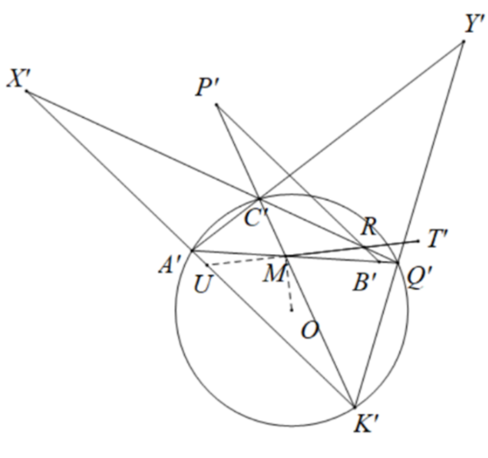
故结论成立. □

证明 2 (刘志源) 首先证明如下引理:

引理 完全四边形 $ABCDEF$ 中有 B, C, E, F 共圆, 设其密克尔点为 M, 则 A, D, M 共线.

证明 由密克尔点定义, $\angle DMC = \angle ABE = \angle AFC = \angle AMC$ 知 A, D, M 共线.





回到原题. 以 M 为反演中心, 任意正值为反演幂作反演变换, 对原图的每个点 Z 用 Z' 表示其变换后对应的点.

有 $MA'=MB'$, $MP'=MK'$, 由 X, Y 的定义知 $X'=A'K'\cap C'Q'$, $Y'=A'C'\cap K'Q'$. 设 $B'P'\cap C'Q'=R$, 由 T 定义知 T' 为完全四边形 $MC'P'RQ'B'$ 的密克尔点, 由引理 M, T', R 共线.

由于 C, P, Q, B 共圆, 故 $\angle CQM=\angle MPB=\angle MKA$, 则有 A, K, Q, C 共圆. 从而 A', K', Q', C' 共圆, 设其为 $\odot O$, 则有 M 关于 $\odot O$ 极线为 $X'Y'$, 从而 $OM\perp X'Y'$.

设 $MT'\cap A'K'=U$, 则 $\frac{MU}{MR}=\frac{MA'}{MB'}=1$, 由蝴蝶定理的逆定理知 $OM\perp MT'$. 那么就有 $MT'\parallel X'Y'$, 由反演变换的保角性知原命题与此等价, 证毕. $\square$

评注 这是一道有一定难度的几何题. 首先应发现这个蝴蝶定理, 找到关于 M 的另一种刻画, 再结合根轴与完全四边形的性质得到此解答, 第二种解法, 多圆去结合反演也很自然, 其本质与法 1 一样.

题 3 正整数 $x>y>2022$, 满足 $xy+x+y$ 为完全平方数. 是否存在 x, y 使得对任意正整数 $z\in[x+3y+1,\ 3x+y+1]$, 均有 $x+y+z$ 和 x^2+xy+y^2 不互素?

解 (王沈杰) 选取 $z=x+y+2\sqrt{xy+x+y}+1$.

由整数 $x>y$ 知

$$z=x+y+2\sqrt{xy+x+y}+1>x+3y+1.$$

当 $y=x-1$ 时, $xy+x+y=y^2+3y+1\in(y^2+2y+1,\ y^2+4y+4)$ 非完全平方数, 故 $y\le x-2$, 则

$$z=x+y+2\sqrt{xy+x+y}+1\le x+y+2\sqrt{x^2-2}+1<3x+y+1.$$

那么有 $z\in[x+3y+1,\ 3x+y+1]$.

下面证明: $(x+y+z,\ x^2+xy+y^2)=1$.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}&(x+y+z)(2x+2y+1-2\sqrt{xy+x+y})\\=&(2x+2y+1+2\sqrt{xy+x+y})(2x+2y+1-2\sqrt{xy+x+y})\\=&4(x^2+xy+y^2)+1,\end{aligned}$$

于是

$$(x+y+z,\ x^2+xy+y^2)=1.$$

故不存在整数 $x,\ y$ 满足题目要求. $\square$

评注 本题大致有两个思路, 第一个是利用 $xy+x+y$ 为完全平方数的条件尝试构造佩尔方程看是否能找到满足条件的 $x,\ y$, 但尝试后就会排除这种想法, 随后就是去找特殊的 z 使得 $(x+y+z,\ x^2+xy+y^2)=1$, 作为一个大胆的尝试, 会往 z 内引入 $\sqrt{xy+x+y}$, 最后再做细致的调整让 $z\in[x+3y+1,\ 3x+y+1]$ 便得到本题的解答.

题 4 设正整数 $n\geq 4$, 实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}$ 中, $x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2$. 如果存在 $a>0$, 使得对任意 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 都有 ${x_i}^2=a+x_{i+1}x_{i+2}$, 证明: $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中至少有两个数为负数.

证明 (易超) 由轮换性, 不妨设 $x_1=\min\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$.

若 $x_1\geq 0$, 则由 ${x_1}^2=a+x_2x_3>{x_1}^2$ 知不可能, 故 $x_1<0$.

假设 $x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$ 中只有 x_1 为负数.

当 $n=4$ 时, 若 $x_3\neq 0$, 则由

$$x_2=\sqrt{a+x_3x_4}\geq\sqrt{a},\ x_1=-\sqrt{a+x_2x_3}<-\sqrt{a},\ x_4^2=a+x_1x_2<0,$$

矛盾. 若 $x_3=0$, 则有

$$x_1=-\sqrt{a},\ x_4=\frac{x_3^2-a}{x_1}=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+x_3x_4}=\sqrt{a}.$$

此时,

$$x_4^2=a+x_1x_2=0,$$

矛盾.

当 $n\geq 5$ 时, 由

$$x_2=\sqrt{a+x_3x_4}\geq\sqrt{a},\ x_3=\sqrt{a+x_4x_5}\geq\sqrt{a},$$

则

$$x_1=-\sqrt{a+x_2x_3}\leq-\sqrt{2a}.$$

从而

$$x_n^2=a+x_1x_2\leq a-\sqrt{2a}\sqrt{a}<0.$$

矛盾.

故假设不成立, 即 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 中至少有两个数为负数. $\square$

评注 本题是基本的代数问题, 只要想到对变量之间的差量进行累积即可.

题 5 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB=4$, $BC=CA=6$. 在线段 AB 上的点 $X_1, X_2, X_3, \cdots$, 使得 $AX_1, X_1X_2, X_2X_3, \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的无穷等比数列. 在线段 CB 上的点 $Y_1, Y_2, Y_3, \cdots$, 使得 $CY_1, Y_1Y_2, Y_2Y_3, \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比数列. 在线段 AC 上的点 $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$, 使得 $AZ_1, Z_1Z_2, Z_2Z_3, \cdots$ 组成一个首项为 3, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的无穷等比数列. 求所有正整数 (a, b, c), 使得 AY_a, BZ_b, CX_c 三线共点.

解 (易超) 根据等比数列求和有:

$$AX_i=4\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^i\right), CY_i=6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right), AZ_i=6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^i\right).$$

从而

$$BX_i=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^i, BY_i=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^i, CZ_i=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

由塞瓦定理知 AY_a, BZ_b, CX_c 共点等价于

$$\frac{AX_c}{X_cB}\cdot\frac{BY_a}{Y_aC}\cdot\frac{CZ_b}{Z_bA}=1,$$

即

$$4^c-1=(2^a-1)(2^b-1).$$

当 a, b 均大于等于 2 时, 由 $4^c=2^{a+b}-2^a-2^b+2$, 有

$$4\nmid 2^{a+b}-2^a-2^b+2,$$

矛盾. 故 $a=1$ 或 $b=1$. 从而 $a=1, b=2c$ 或 $b=1, a=2c$. 因此所有解为 $(a, b, c)=(1, 2c, c)$ 或 $(a, b, c)=(2c, 1, c)$. □

评注 本题是一道很基本的问题, 用塞瓦定理刻画三线共点后结合幂次分析即可得到结论.

题 6 设正整数 $n\geq 2$, 正整数集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 满足对任意 $i, j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $A_i\cap B_j\neq\varnothing$, 且对任意 $i, j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $B_i\cap B_j=\varnothing$. 将每个集合中的所有元素按降序排列, 并计算相邻元素的差的值. 求这些差中的最大值可能的最小值.

解 (刘志源) 最小值为 n. 我们画一个 $n\times n$ 的方格表, 在第 i 行第 j 列填上 $X_{i,j}=A_i\cap B_j$ 的所有元素, $\forall i, j\in\{1, 2, \cdots, n\}$.

记

$$T_i=A_i\setminus\Big(\bigcup_{j=1}^n B_j\Big), S_i=B_i\setminus\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big), \quad \forall i\in\{1, 2, \cdots, n\},$$

则

$$A_i=\Big(\bigcup_{j=1}^{n}X_{i,\,j}\Big)\cup T_i,\ B_i=\Big(\bigcup_{j=1}^{n}X_{j,\,i}\Big)\cup S_i,\quad \forall i\in\{1,\,2,\,\cdots,\,n\},$$

取

$$X_{i,\,j}=\{(i-1)n+j\}\,,\quad \forall i,\ j\in\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}\,,$$

此时 A_i 相邻元素差均为 1, B_i 相邻元素差均为 n.

下证最小性成立, 反证:假设 $A_i,\ B_i$ 中元素按降序排列后相邻两项之差小于等于 $n-1$.

设 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{j=1}^{n}X_{i,\,j}$ 里所有元素中最小的为 m, 最大的为 M. 不妨设 $T_i,\ S_i$ 均为空集(对于每一个 i, 先将 $T_i,\ S_i$ 中小于等于 $m-1$ 与大于等于 $M+1$ 的元素去掉. 若 $T_i\neq\varnothing$, 则必存在 $x\in T_i$, $\exists\, k\in\bigcup\limits_{j=1}^{n}X_{i,\,j}$, $|k-x|\leq n-1$, 我们将 x 从 T_i 中删去后, 将 x 加入 k 所在的集合, 重复这样的操作即可使 $T_i,\ S_i$ 为空集).

我们将元素按从小到大的顺序依次填入方格表中, 我们称一行或一列被填满当且仅当此行或此列的每一个方格内已有大于等于 1 个元素填入.

若存在 t 使得填入 t 后, 每一行均未被填满但每一行均已有元素填入. 考虑 $t+1,\ t+2,\ \cdots,\ t+n-1$ 这 $n-1$ 个元素至多填入 $n-1$ 行, 即有 $\exists\, i\in\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}$, 满足

$$A_i\cap\{t+1,\ t+2,\ \cdots,\ t+n-1\}=\varnothing$$

且

$$A_i\cap\{1,\ 2,\ \cdots,\ t\}\neq\varnothing,\ A_i\cap\{t+n,\ t+n+1,\ \cdots,\ M\}\neq\varnothing,$$

则 A_i 中元素降序排列后相邻的数之差必有一个大于等于 n, 矛盾!

若不存在 t 使得填入 t 后, 每一行均未被填满但每一行均已有元素填入. 这意味着存在 k 使得填入 k 后, 有一行被填满且有一行未填入任意一个元素, 则此时每一列均已填入了元素但均未被填满, 那么同上考虑 $k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+n-1$ 这 $n-1$ 个元素至多填入 $n-1$ 列, 即知 $\exists\, i\in\{1,\,2,\,\cdots,\,n\}$, B_i 中元素降序排列后相邻的数之差必有一个大于等于 n, 亦得矛盾!证毕. $\square$

评注 这是一个中规中矩的组合极值问题, 将集合的条件转化为图表描述后, 答案与构造容易想到, 证明也不困难, 本质上此题是一个填数的问题.